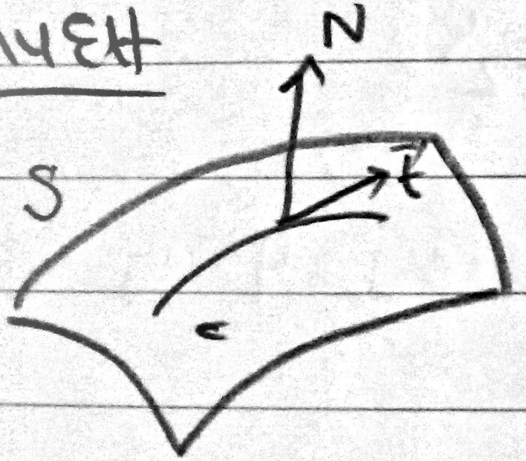
Άσκηση 1

S κανονική, $c: I \to S$ ασυμπτωτική καμπύλη με $k>0$ και στρέψη τ. ΝΔΟ $\tau^2 = -K\circ c$ με K καμπυλότητα Gauss.

ΛΥΣΗ



Έστω c με παράμετρο το μήκος τόξου.

$k_n(\dot{c}(s)) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{II}_{c(t)}(\dot{c}(s)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle L_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow -\langle dN_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle (N\circ c)^{\circ}(s), \dot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle N\circ c(s), \dot c(s)\rangle^{\circ} \overset{0}{-} \langle N\circ c(s), \ddot c(s)\rangle$

$\Leftrightarrow \langle N\circ c(s), \ddot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle N\circ c(s), -k(s)\vec n(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle N\circ c(s), \vec n(s)\rangle = 0 \Rightarrow n(s)\in T_{c(s)}S$

$\vec b = \vec t\times\vec n \Rightarrow \vec b(s) = \pm N\circ c(s), \forall s \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec b}(s) = \pm (N\circ c)^{\circ}(s) \Rightarrow -\tau(s)\vec n(s) = \pm dN_{c(s)}(\dot c(s)) =$

$= \mp L_{c(s)}\dot c(s).$

$\tau^2(s) = \| L_{c(s)}(\dot c(s))\|^2 = \langle L_{c(s)}(\dot c(s)), L_{c(s)}(\dot c(s))\rangle = III_{c(s)}(\dot c(s))$

$III - 2H\,II + KI = 0$ Θεωρ.

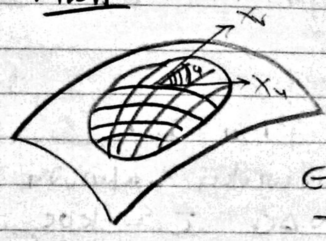
$III_{c(s)}(\dot c(s)) - 2H(c(s))\,II_{c(s)}(\dot c(s)) + K\circ c(s)\,I_{c(s)}(\dot c(s)) = 0$

$\Rightarrow \tau^2(s) + K\circ c(s) = 0$

Άσκηση 2

Έστω σύστ. συντ/νων $x: U\subset\mathbb{R}^2\to S$. Αν οι παραμετρικές καμπύλες τέμνονται υπό σταθερή γωνία και το $x(u,v)$ είναι δίκτυο ασυμπτωτικών καμπυλών τότε νδο $\frac{H^2}{K}$ = σταθ, $K\neq 0$

ΛΥΣΗ



$$\cos\varphi = \frac{\langle x_u, x_v\rangle}{\|x_u\|\cdot\|x_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Αφού, οι παραμετρικές είναι οι ασυμπτωτικές καμπύλες τότε $e=g=0$

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG-F^2)} \Rightarrow H = -\frac{Ff}{EG-F^2}$$

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{f^2}{EG-F^2}$$

$$H = -\frac{Ff}{EG - EG\sin^2\varphi} \Rightarrow H = -\frac{Ff}{EG\sin^2\varphi} \Rightarrow K = -\frac{f^2}{EG \cdot \sin\varphi^2}$$

$$\frac{H^2}{K} = \frac{\frac{F^2 f^2}{E^2G^2\sin^4\varphi}}{-\frac{f^2}{EG\sin^2\varphi}} = -\frac{F^2 EG\sin^2\varphi}{E^2G^2\sin^2\varphi} = -\frac{F^2}{EG\sin^2\varphi} =$$

$$= -\frac{\cancel{EG}\cos^2\varphi}{\cancel{EG}\sin^2\varphi} = -\cot^2\varphi = \text{σταθ.}$$

Άσκηση 3

Δίνεται επιφάνεια $S: z = e^x - e^y$

i) Ποιες οι ασυμπτωτικές καμπύλες;

ii) '' '' '' '' από το $(0,0,0)$

iii) Είναι αναπτυκτή;

iv) Είναι ελλειπτικής;

ΛΥΣΗ

i) S γράφημα $f(x,y) = e^x - e^y$

2η θ.π.:

$e = \frac{f_{xx}}{\sqrt{\ }} = \frac{e^x}{\sqrt{\ }}$, $g = \frac{f_{yy}}{\sqrt{\ }} = -\frac{e^y}{\sqrt{\ }}$

$f = \frac{f_{xy}}{\sqrt{\ }} = 0$

$c(t) = x(u(t), v(t))$ ασυμπτωτική καμπύλη

$e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2 = 0$

$e = e(u(t), v(t))$

ii) Έστω $x: \mathbb{R}^2 \to S^2$ με $X(x,y) = (x, y, e^x - e^y)$

Η $c(t) = X(x(t), y(t))$ ασυμπτωτική $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x(t)}(x'(t))^2 - e^{y(t)}(y'(t))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{x(t)/2}(x'(t)) - e^{y(t)/2}y'(t)) = 0$ ή

ή $(e^{x(t)/2}x'(t) + e^{y(t)/2}y'(t)) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\frac{x}{2}(t)} - e^{\frac{y}{2}(t)} = c_1}_{(I)} \quad \text{ή} \quad \underbrace{e^{\frac{x}{2}(t)} + e^{\frac{y}{2}(t)} = c_2}_{(II)} \Rightarrow$$

(I): $x(t) = t$, έτσι $e^{\frac{y(t)}{2}} = e^t - c_1 \Rightarrow y(t) = 2\log(e^{t/2} - c_1)$

$c(t) = x(t, 2\log(e^{t/2} - c_1)) = (t, 2\log(e^{t/2} - c_1), t - (e^{t/2} - c_1)^2)$

όμοια και η (II)

ii) $x(0) = 0$ και $y(0) = 0$

$e^{\frac{x(0)}{2}} - e^{\frac{y(0)}{2}} = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

όμοια για το II.

iii) Η (I) δεν είναι ευθεία διότι αν την προβάλλουμε στο επίπεδο τότε παίρνουμε την καμπύλη μορφής

$\tilde{c}(t) = (t, 2\log(e^{t/2} - c_1))$

Δηλ. η $\tilde{c}(t)$ στο επίπεδο δεν είναι σημείο ή ευθεία αλλά άλλου είδους καμπύλη. $\Rightarrow$ όχι ευθογενής $\Rightarrow$ όχι αναπτυκτή

iv) όχι ευθογενής από το (iii).

ή

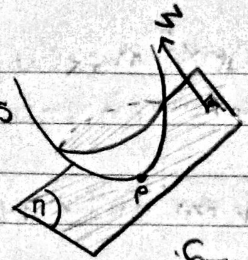
$K \neq 0$.

Σχόλιο

Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$.

Αν υπάρχει Π που τέμνει την S μόνο στο p, δηλ $S \cap \Pi = \{p\}$ και τότε $T_pS = \Pi$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω w μοναδ. κάθετο του Π προς τον ημιχώρο που περιέχει την $S\setminus\{p\}$

Έστω $X: U \to S$ συστ. συντ/νων με $p \in X(U)$

Θεωρώ την συνάρτηση $h: U \to \mathbb{R}$: $h(u,v) = \langle X(u,v)-p, w\rangle$

Εξ υποθέσεως έχουμε $h(u,v) > 0$, $\forall (u,v) \neq (u_0,v_0)$ $(h(u_0,v_0)=0)$. Επίσης, $h_u(u_0,v_0) = h_v(u_0,v_0) = 0$. Έτσι,

$$\left.\begin{cases} h_u(u,v) = \langle X_u(u,v), w\rangle \\ h_v(u,v) = \langle X_v(u,v), w\rangle \end{cases}\right| \Rightarrow \langle X_u(u_0,v_0), w\rangle = 0 = \langle X_v(u_0,v_0), w\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w \perp X_u(u_0,v_0) \\ w \perp X_v(u_0,v_0) \end{cases} \Rightarrow X_u \times X_v(u_0,v_0) \parallel w \Rightarrow \Pi = T_pS.$$

Άσκηση 4

Δίνεται $S: z = x^2 + y^3$

Να βρεθέ τα ελλειπτικά, υπερβολικά, παραβολικά, ομφαλικά, επίπεδα σημεία της S.

ΛΥΣΗ

Έστω $X: \mathbb{R}^2 \to S$, $X(u,v) = (u, v, u^2+v^3)$, συστ. συντ/νων

$E = 1+4u^2$, $F = 6uv^2$, $G = 1+9v^4$

$e = \dfrac{2}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}}$, $f = 0$, $g = \dfrac{6v}{\sqrt{}}$

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ:

$eg - f^2 > 0 \Leftrightarrow v > 0$

Υπερβολικά

$eg - f^2 < 0 \Leftrightarrow v < 0$

Παραβολικά:

$eg - f^2 = 0$ και $(e,f,g) \neq (0,0,0)$ όπου $e > 0$

$\Leftrightarrow v = 0 \Rightarrow X(u,0) = (u,0,u^2)$

Ισοπεδα: $\text{II}=0 \Rightarrow (e,f,g)=(0,0,0)$ ΔΕΝ υπάρχουν

Ομφαλικά: $\frac{e}{E}=\frac{f}{F}=\frac{G}{g}\neq 0 \overset{f=0}{\Rightarrow} F=0 \Leftrightarrow u=0$ ή $v=0$

$(u=0)$: $\dfrac{\frac{2}{\sqrt{\ }}}{1}=\dfrac{\frac{6v}{\sqrt{\ }}}{1+9v^4} \Rightarrow 1+9v^4=3v \Leftrightarrow 9v^4-3v+1$

Θέτω $f(x)=x^4-3x+1$

$f'(x)=4x^3-3x$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ψάχνω θες. ελαχ.

$(v=0)$: δεν υπάρχουν αφού για $v=0$ είναι παραβολικά οπότε όχι ομφαλικά

Άσκηση 5

Έστω $x: U \to S$ σωστ. σύντιμη κανονική επιφάνεια S με παραμέτρους (u,v)

Δείξτε ότι $N_u \times X_v + X_u \times N_v = -2H\, X_u \times X_v$

και $N_u \times N_v = K\cdot X_u \times X_v$

ΛΥΣΗ

$L X_u = -N_u$, $L X_v = -N_v$

Θυμίζουμε επίσης

$L X_u = \alpha_{11} X_u + \alpha_{21} X_v$

$L X_v = \alpha_{12} X_u + \alpha_{22} X_v$

Έτσι,

$N_u \times X_v + X_u \times N_v = -L X_u \times X_v - X_u \times L X_v =$

$= -(\alpha_{11} X_u + \alpha_{21} X_v) \times X_v - X_u \times (\alpha_{12} X_u + \alpha_{22} X_v) =$

$= -\alpha_{11} X_u \times X_v - \alpha_{22} X_u \times X_v = -(\alpha_{11}+\alpha_{22}) X_u \times X_v = -2H\, X_u \times X_v$

Αντίστοιχα

$N_u \times N_v = L X_u \times L X_v = (\alpha_{11} X_u + \alpha_{21} X_v) \times (\alpha_{12} X_u + \alpha_{22} X_v) =$

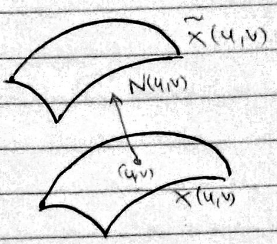
$= \alpha_{11}\alpha_{22} X_u \times X_v + \alpha_{21}\alpha_{12} X_v \times X_u =$

$= (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) X_u \times X_v = \det L (X_u \times X_v) = K\, X_u \times X_v$

Άσκηση 6

Έστω $X(u,v)$ κανονική παραμετρική επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο $N(u,v)$ και ένα $a \neq 0$. Ορίζω την παραμετρική επιφάνεια

$\tilde{X}(u,v) = X(u,v) + a N(u,v)$



i) Να εξετάσετε πότε η $\tilde{X}$ είναι κανονική.

ii) Αν είναι κανονική νδο

$$\tilde{K} = \frac{K}{1-2Ha+Ka^2} \quad \text{και} \quad \tilde{H} = \frac{H-Ka}{1-2Ha+Ka^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $\tilde{X}_u = X_u + a N_u$ και $\tilde{X}_v = X_v + \alpha N_v$

$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = X_u \times X_v + \alpha X_u \times N_v + \alpha N_u \times X_v + \alpha^2 N_u \times N_v$

$= X_u \times X_v - 2H\alpha X_u \times X_v + a^2 K X_u \times X_v$

$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = (1 - 2Ha + a^2 K) X_u \times X_v$.

Όπου

$(1 - 2Ha + a^2 K) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} - 2H \frac{1}{a} + K = 0 \overset{⊛}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\alpha}$ είναι κύρια καμπυλότητα

⊛ ($\chi_L(t) = t^2 - \mathrm{tr} L \cdot t + \det L = t^2 - 2Ht + K$)

Η $\tilde{X}$ είναι κανονική $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}$ όχι κύρια καμπυλότητα

ii) $\tilde{N} = \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\|} = \pm \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \pm N$

έστω $\tilde{N} = +N$ δίχως βλάβη

$\tilde{N}_u \times \tilde{N}_v = \tilde{K} \, \tilde{X}_u \times \tilde{X}_v \Leftrightarrow N_u \times N_v = \tilde{K}(1 - 2Ha + Ka^2) X_u \times X_v$

$\boxed{N_u \times N_v = K \, X_u \times X_v} \Leftrightarrow K (X_u \times X_v) = \tilde{K}(1 - 2Ha + Ka^2) X_u \times X_v$

$\Longrightarrow K = \tilde{K}(1 - 2Ha + Ka^2)$

Παρατήρηση:

$H = \sigma\tau\alpha\vartheta \neq 0 \Rightarrow \tilde{K} = \frac{\cancel{K}}{\cancel{1-1}+\cancel{K}\left(\frac{1}{4H^2}\right)} = 4H^2$